Investigações matemáticas como base para a construção de conceitos

Pascal Paulus

Estou convencido de que a percepção da linguagem matemática passa pela capacidade de fixar a realidade observada num registo escrito, como referem autores como John Allen Paulos ou Gerard Vergnaud.

Isto implica formulações e reformulações mas também a análise cuidadosa de situações vivenciadas.

Escolhi os dois relatos que seguem por que descrevem acontecimentos que necessitaram de um tratamento aprofundado, o que implicou abordagens sucessivas do problema, tentando fixar pouco a pouco o seu significado matemático. São duas situações vividas na mesma turma: a primeira no 3º ano de escolaridade, a outra um ano mais tarde. No segundo relato, o trabalho envolve dois grupos, pelo que o «nós» se refere à actuação conjunta com a professora do outro grupo de crianças.

Investigar a frequência de letras para construir um jogo.

Propus aos alunos a construção de um scrabble português para a sala, para o qual eu tinha já desenhado e plastificado o tabuleiro.

Faltavam as letras. Sugeri que procurassemos uma distribuição das letras do alfabeto, no total de 100.

Como fazer?

O P. pergunta quantas letras tem o alfabeto e acrescenta: «Como são mais ou menos 25, 4 letras de cada: 4 x 25 igual 100.»

O R. sente que não deve ser tão fácil. Após discussão constatámos que utilizamos mais a's que x's, para só ficar com este exemplo.

O Daniel propõe contar letras.

Isto gera alguma discussão.

Contar letras como? onde?

Decidimos escolher um parágrafo do livro que estou a ler para a turma e contar todas as letras daquele parágrafo.

Dividimos as letras do alfabeto por 6 grupos de crianças.

Tentámos que o trabalho fosse distribuído de forma mais ou menos igual. Isto revela algumas coisas interessantes:

– os alunos consideram que as vogais são as mais importantes e frequentes. Atribuem logo uma vogal a cada grupo, ficando o sexto com duas consoantes que pensam serem as mais utilizadas.

– consideram **s** (aparecendo em todos os plurais) menos frequente que **d** ou **n**. Não consideram **y**, **k** e **w**, mas introduzem o **ç**.

Cada grupo procura a sua própria estratégia para contar as letras que lhes foram distribuídas:

– num grupo, os alunos distribuem as letras. Uma criança não recebe letras mas soletra o texto, e vai ditando as letras ao grupo. Cada um aponta as letras que lhe couberam.

– noutro grupo, cada elemento circunda primeiro as letras designadas, depois contam dois a dois as letras que escolheram.

– noutro grupo ainda, cada um aponta as letras conforme um código combinado entre os elementos do grupo para facilitar a contagem que cada um faz. Depois conferem resultados.

– em dois grupos utilizam 4 cores diferentes para realçar as letras, e depois cada elemento do grupo conta as letras numa das cópias do texto.

– o último grupo pede uma cópia do texto para cada letra da qual faz o levantamento. Cada um dos elementos lê as quatro cópias controlando o que já está apontado e o que foi esquecido. No fim registam a frequência de cada letra, contando por grupos de 5.

Após contagem, aparece o seguinte quadro:

A resposta é muito mais unânime do que eu estava à espera:

– Claro que não. Depende das palavras do texto, disse um.

– Queres uma prova? Neste texto não há nenhum ç, mas sabemos que há textos com **ç**, senão não existia o **ç**, acrescenta outro.

Afirmo à turma que esta discussão é muito importante, e que a iremos retomar, mas que existe ainda outra dificuldade: como saber quantas letras de cada é que temos que pôr no nosso jogo?

grupo 1		grupo 2		grupo 3		grupo 4		grupo 5		grupo 6	
a	127	e	91	i	50	o	82	u	20	d	27
b	10	c	14	f	7	h	10	g	16	n	29
j	1	l	14	m	36	p	24	q	6	r	46

Com este quadro já feito, peço os alunos uma estimativa do total das letras. Eis os resultados:
entre 200 e 300 letras: 3 alunos
entre 300 e 400 letras: 4 alunos
entre 400 e 500 letras: 6 alunos
entre 500 e 600 letras: 2 alunos e o professor
entre 600 e 700 letras: 1 aluno
entre 700 e 800 letras: 1 aluno
sem ideia: os outros

Controlámos a estimativa de duas maneiras: dum lado, faz-se a soma de todos os totais de letras apuradas, do outro lado, conta-se as letras de cada linha de texto, somando estes subtotais. Como por magia (entendida de maneira diferente por mim e pelos alunos) os dois valores coincidem: 711 letras.

Abre-se nova discussão: já sabemos que neste texto de 711 letras há 127 **a**'s, 91 **e**'s, 50 **i**'s, etc.

– Mas isto é mesmo assim? Isto é, qualquer texto de 711 letras dará esta distribuição? pergunto eu.

Um dos alunos propõe tirar letras «De 711 para 100, tiramos 611 letras. Basta fazer a mesma coisa para todas elas.»

Há logo um embate:

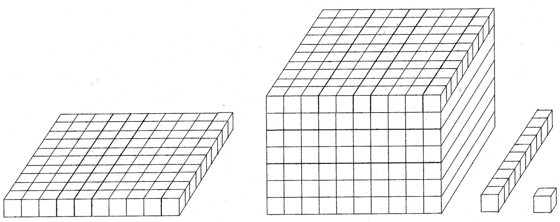
– Assim, cada letra fica em 0.

– Não, algumas ficam mais em 0 que as outras.

– Mais em zero, quer dizer abaixo de 0, como no termómetro.[1]

– Mas se todas as letras ficam abaixo de 0, então não temos letras no jogo!

É claro que algo está mal. Proponho que representemos com o material MAB o que temos e o que queremos:



o que queremos o que temos

Quando peço que descrevam do modo mais preciso possível o que vêem, o D. depois de algumas tentativas de vários alunos, formula : «No monte de letras do texto, há mais ou menos 7 vezes o que queremos.»

Reformulo: «Queremos sete vezes menos letras do que temos.»

O Paulo, repetente, lembra-se de repente: «Se queremos 7 vezes menos, teremos que dividir.»

Mas Catarina propõe: «Podemos ver quantos grupinhos de 7 conseguimos fazer para cada letra.»

Os grupos voltam ao trabalho. No quadro vai crescendo a tabela seguinte, a medida que vamos trabalhando:

Os grupos 3 e 6 fartam-se de discutir a cada passo, razão pela qual decidimos interromper os trabalhos.

As propostas não convencem em muitos casos:

– Isto não dá, há muitas divisões que não dão um número certo.

– Mas pode se ir para o número mais próximo: se dá quase 2, vai para o 2.

– Ó Pascal, às vezes não é preciso fazer divisões, vê-se logo com a tabuada. (De facto, já tinha reparado que o grupo 1 desistiu com o **a** (127) e que teve grandes dúvidas com o 91 do **e**.)

letra	original	gr 1	gr 2	gr 3	gr 4	gr 5	gr 6
a	127	-	19	-	18	17	-
b	10	1	1	1	1	1	1
j	1	0	1	-	0	0	0
s	48	6	7	6	6	6	7
e	91	-	2	12	13	13	13
c	14	1	2	2	2	2	2
l	14	2	2	2	2	2	2
t	36	5	13	5	5	5	5
i	50	7	7	-	7	8	7
f	7	1	7	-	1	1	1
m	36	0	1	0	0	0	1
x	1	1	0	-	0	0	1
o	82	9	11	11	11	11	-
h	10	1	1	-	1	1	-
p	24	3	4	3	3	-	-
ç	0	0	0	0	0	0	-
u	20	2	3	-	2	3	-
g	16	2	2	2	3	2	-
q	6	0	1	2	0	0	-
z	2	0	1	-	0	0	-
d	27	3	4	-	-	3	-
n	29	4	4	4	-	4	-
r	46	6	7	6	-	6	-
v	14	2	2	-	2	2	-

As discussões dos grupos 3 e 6 envolvem agora a turma toda: como fazer para as letras que nem sequer chegam a 7, na contagem original?

Podemos pôr 1 **f**, 1 **m** e 1 **x**?

E o **h**? Podemos pôr 2 ou só 1? Há uma grande diferença. Mas pelo menos uma letra tem que estar no jogo, senão não o alfabeto não fica completo.

Para o grupo 2, o problema é outro: o **f**, que tem 7 no original, também tem 7 na distribuição final. Justificação: Não se pode dividir 7 por 7, portanto fica 7.

O material Cuisenaire ajuda a resolver a dúvida. De facto, podem pôr-se exactamente 7 unidades por baixo da régua preta.

Sendo assim, proponho que voltemos a ver todas as propostas dos diferentes grupos e que cada grupo traga a sua «média» em função da tabela que ainda está no quadro. (este trabalho vai ser de valor inestimável, quando mais tarde pegarmos no lego-logo.)[2]

letra	original	gr 1	gr 2	gr 3	gr 4	gr 5	gr 6	Pascal	final
a	127	18	19	19	18	17	18	17	19
b	10	1	1	1	1	1	1	2	1
j	1	1	1	1	1	0	0	1	1
s	48	6	7	6	6	6	6	6	6
e	91	13	13	13	13	13	13	13	13
c	14	2	2	2	2	2	2	2	2
l	14	5	2	2	2	2	2	2	2
t	36	7	7	13	5	5	5	5	5
i	50	1	7	7	7	7	7	7	7
f	7	7	1	8	1	1	1	1	1
m	36	1	1	1	0	0	1	1	1
x	1	14	1	9	0	0	1	1	1
o	82	11	-	11	11	9	11	12	11
h	10	1	1	1	1	1	1	2	1
p	24	4	6	4	3	3	3	4	3
ç	0	0	0	0	0	0	1	1	1
u	20	3	9	3	2	2	3	2	3
g	16	3	3	3	3	2	2	2	3
q	6	2	-	2	0	1	1	1	1
z	2	1	2	1	1	0	1	1	1
d	27	4	7	4	4	3	4	4	4
n	29	4	4	4	4	4	4	4	4
r	46	7	3	7	8	6	6	7	7
v	14	2	1	2	2	2	2	2	2
total	711	118	98	124	95	92	96	100	100

A escolha final não é simplesmente a média das propostas dos grupos. Por um lado, todos tiveram dificuldades em chegar a uma distribuição de cem letras, porque isto implica várias compensações, algo que os alunos dominavam mal. Por outro lado, continuam particularmente teimosos com a compensação para baixo de algumas letras pouco frequentes, e de compensação para cima para as letras mais frequentes. Digamos que a proposta final é uma proposta para podermos arrancar com o jogo.

Na prática, verificamos que nos faltavam algumas letras, porque as palavras do vocabulário corrente da sala implicava mais letras «**m**», «**f**», «**d**» e «**u**». Juntámo-las e retirámos alguns **a**'s e alguns **e**´s. A rectificação final, fez-se quando apareceu o Scrabble editado em versão portuguesa, com um conjunto de 120 letras. Sentimo-nos autorizados a copiar e rectificar, utilizando o scrabble de marca como modelo, já que «eles com certeza contaram muito mais páginas de texto que nós», como dizia a R..

A festa de Magusto – Análise de dados

O trabalho que aqui relatamos foi feita no ano lectivo 1990-1991, por duas turmas, um 3º e um 4º ano.[3]

No dia a seguir à festa do Magusto, houve nas duas turmas várias novidades acerca das rifas compradas. Na discussão que se desenvolveu, os alunos chegavam à conclusão de que uns foram mais «sortudos» que outros. Mas esta discussão gera polémica:

– O que quer dizer ter mais sorte do que os outros¿

– Quais são os critérios que utilizam para decidir tal¿

– Os critérios são utilizados da mesma maneira, quando se trata de comparar a sorte dum amigo, com a sorte de alguém com quem não há grandes amizades¿

Propomos então, nas duas turmas, que cada um responda às seguintes perguntas – previamente combinadas em conjunto.

1. Quantas rifas compraste¿
2. Quanto pagaste ao todo¿
3. Quantas prendas te saíram¿
4. Quanto é que pagaste em média por prenda¿

Cada aluno respondeu às perguntas, segundo o seu caso pessoal.

Da recolha destas respostas resultou o seguinte quadro:

nome	dinh.gasto	nº prendas	preço/unid.
Alexandre	260	5	52
Ana Raquel	150	5	30
André	200	2	100
Catarina	200	2	66,50
Daniel	20	1	20
David C.	250	4	62,50
Débora	700	4	175
Duarte	150	5	30
Elisabete	200	1	200
Filipa	200	5	40
Frederico	600	3	200
Hugo	150	5	20
Inês (3ª)	200	3	66,50
Inês (4ª)	150	3	50
Joana	150	1	150
Leandro	400	10	40
Luzia	200	5	40
Marta M.	200	16	12,50
Nuno	100	5	20
Paulo	100	4	25
Rita	100	2	50
Rodrigo	100	9	11
Rui	150	1	150
Sandra	500	4	125
Sara (3ª)	50	0	¿
Sara (4ª)	150	5	30
Tiago (3ª)	220	4	55
Zélia	120	4	30

Para chegar aos resultados inscritos neste quadro, tivemos que reactivar algumas ideias relativamente à divisão. Lembrou-se no 4º ano como foi construído o scrabble, o que foi um apoio para voltar à criação duma equação do seguinte tipo:

$$\frac{\text{Dinheiro Gasto}}{\text{Número de Prendas}} = \frac{\text{Dinheiro}}{\text{Prenda}} = \text{Preço por Unidade}$$

No dia a seguir começamos a discutir «Quem é que tinha tido mais sorte¿» Como à partida, não definimos critérios, da discussão em pequenos grupos, surgem estes hipóteses:

nome	dinh.gasto	nº prendas	preço/unid.
Elisabete	200	1	200
Marta	200	**16**	12,50
Leandro	400	10	40
Rodrigo	100	9	**11**
André	200	2	100

A maioria dos alunos elegem a Marta como sendo a que teve mais sorte. Dois dos alunos, o André e a Elisabete elegem-se a si próprios. O Leandro aparece por ser quem na terceira classe é considerado o mais «sortudo». O Rodrigo é apontado por quatro alunos.

Para definir o conceito sorte, foi portanto considerado:

– o maior número de prendas define a maior sorte. (o que acontece no caso da Marta)

– a razão $\frac{Dg}{Np} \to 10$ (tende para 10) define a maior sorte. (caso do Rodrigo)

Não é explicitada a terceira hipótese:

– o menor dinheiro gasto define a maior sorte. (caso do Daniel)

Procuramos então explicitar os parâmetros utilizados nesta tabela.

A discussão continua muito acesa. Convecemos o André, a Elisabete e o Leandro, de que não são os alunos com mais sorte, mas não se chega a um acordo perante o Rodrigo e a Marta. Pelo contrário, na discussão surge a explicação: «A Marta teve mais sorte porque teve mais prendas», como também surge: «O Rodrigo teve mais sorte, porque pagou menos por prenda».

Propomos analisar melhor a relação que estabelecemos.

Evidentemente, a equação podia ensinar-nos alguma coisa: quando o dinheiro gasto aumenta, o preço por unidade também aumenta, quando o número de prendas aumenta, o preço por unidade baixa. Logo, quando diminuímos o dinheiro gasto e *ao mesmo tempo* aumentamos o número de prendas, aproximamo-nos mais depressa dum limite.

O Rui consegue formular esta constatação da maneira seguinte:

«Se eu tivesse 10 prendas para 100 escudos, então teria a sorte máxima, uma vez que cada rifa custa 10 escudos. As prendas não podem custar menos que 10 escudos.»

Isto abre outra perspectiva:

Nós, professores, argumentamos:

– com 100 escudos, o máximo de prendas são 10, e o Rodrigo teve 9.

– com 200 escudos, o máximo de prendas são 20, e a Marta teve 16.

Então o Rodrigo esteve mais perto do máximo de prendas possíveis, porque só lhe faltou 1 em 10, enquanto à Marta lhe faltaram 4 em 20.

Para a maioria dos alunos do 4º ano isto é um bom argumento para considerar o Rodrigo como quem teve mais sorte, para outros, continua a valer que afinal de contas, a Marta teve 16 prendas e o Rodrigo só 9.

Lançados como estamos, quer se agora também procurar quem teve mais azar. As opiniões continuam difusas:

nome	dinh.gasto	nº prendas	preço/unid.
Elisabete	200	1	**200**
Frederico	600	3	**200**
Sara	50	**0**	¿
Zélia	120	4	30

Raquel	150	5	30
Daniel	20	**1**	20
Joana	150	**1**	150
Rui	150	**1**	150

Na quarta classe, começa a haver dúvidas.

Puseram de lado a Débora, que gastou ainda mais dinheiro que o Frederico. Isto porque, à Elisabete e ao Frederico cada uma das prendas custou 200 escudos enquanto a Débora só gastou 175 escudos por prenda.

Mas, mesmo tendo gasto mais dinheiro, o Frederico teve 3 prendas, a Elisabete só uma. Então, a Elisabete teve mais azar? «Mas,» disse o Daniel, «então eu também tive azar, como a Joana e o Rui.»

O David repara: «Há alunos que não tiveram nenhuma prenda. Primeiro, os que não estiveram cá no dia da Festa do Magusto, e depois, a Sara que gastou dinheiro e que não teve nenhuma prenda.»

Agora, a discussão é mesmo acesa:

– Não podes incluir os que não estiveram cá!

– Assim, também podes dizer que tiveram mais sorte, porque não gastaram dinheiro em rifas...

– A Sara só gastou 50$00.

– Há outros que gastaram muito mais, e além disso, pagaram muito mais por prenda.

Agora, e ao contrário da discussão à volta do conceito de sorte, saltam claramente três hipóteses:

– Quem gastou mais teve mais azar. (caso da Débora)

– Quem teve menos prendas teve mais azar. (caso da Sara ou Elisabete, Joana e Rui)

– Quem tem o custo por unidade maior é que teve mais azar. (caso do Frederico e Elisabete)

Desenvolvemos o trabalho, só com os alunos da 4ª classe.

Recapitulo então o raciocínio que utilizamos para chegar ao conceito de sorte: «Se ao mesmo tempo diminuímos o dinheiro gasto e aumentamos as prendas, chegamos ao limite: quem está mais próximo de 10$00 por prenda teve mais sorte.»

Os alunos não consideram a situação do Daniel, porque, implicitamente, misturam o critério de menos prendas, com o critério de custo por unidade.

Já apontaram o Frederico e a Elisabete como tendo mais azar, porque tem o valor por prenda mais alto. É só saber se este valor pode ser ainda mais alto, e se sim, qual o valor limite.

Provoco: «Para já podemos pôr a questão: quanto é que Sara pagou por prenda?»

Algumas crianças respondem «zero», outras respondem «50 escudos».

Mas o Rodrigo não concorda:

«Se a Sara tivesse pago zero escudos, então teria tido ainda mais sorte do que eu. E como não teve prenda e gastou dinheiro, isto não está certo.»

Outro avança: «Mas a Sara pagou 50$00 por uma 'prenda' que não teve.»

«Pode se então dizer que a Elisabete e o Frederico têm mais azar; isto é: ter uma prenda cara é mais azar do que não ter prenda barata?» pergunto eu.

O Hugo observa: «Para acharmos o preço por prenda, dividimos o que pagamos pelas prendas que obtivemos.»

Disse o David: «Então é simples, é dividir 50 por 0.»

Novo desacordo.

Paulo: «Não se pode dividir por 0.»

Como eu não me manifesto, os outros não acreditam. David está em apuros com o algoritmo da divisão: «Só dá zeros!»

No programa LOGO, o computador responde ao David e Sara: «Não divido por zero».

As máquinas calculadores apresentam um E, ou um zero com **ERROR** por cima.

Os meios auxiliares não dão grande resposta.

Proponho o ∞, mas só alerta um ou dois alunos. «Isto, já vi num livro» é a resposta.

Fica em aberto o problema, enquanto os alunos vão procurar o símbolo, e eu uma maneira para lhes mostrar que quando o número de prendas tende para 0, o dinheiro gasto por prenda tende para o infinito.

Alguns dias depois, o Rodrigo e a Inês, têm ambos a resposta para o símbolo. É o infinito.

– E isto quer dizer o quê?

– É o número maior?

– Não, é maior do que qualquer número.

– É algo onde nunca se chega.

– Explica.

– Então, é como o horizonte: a gente pode ver o horizonte, mas nunca chega lá.

(Isto é uma forma bonita para explicar que por mais que se aproxime do infinito, se continua à mesma distância)

Aproveito:

– Entretanto, eu tenho algo para vos mostrar: fazemos a seguinte multiplicação: 3 x 10.

Coro: – É 30.

– E x 100.

Coro: – É 300.

– E x 1000

Coro: – É 3000

– E agora, vamos multiplicar com 0,1.

Alguns recorrem a maquina calculadora, e passam depois para a grelha decimal, mas todos concordam: é 0,3.

– E x 0,01

– É 0,03

– E x 0,001

– É 0,003

– Bem.

Conclusões: quando multiplicamos por um número 10 vezes maior, o resultado é 10 vezes maior. Quando multiplicamos por um número 10 vezes menor, o resultado é 10 vezes menor. Agora, passando para a divisão:

– 50 : 10?

– É 5.

– 50 : 100?

– É 0,5

– 50 : 1000?

(algumas calculadoras...)

– É 0,05

– E agora, pensem bem: 50 : 0,1

– Antes de fazer a conta, tentem perceber o que se passa. Lembrem o que se passa quando multiplicamos por um número cada vez mais pequeno. E por um número cada vez maior. Agora, voltem a pensar na divisão.

Depois de alguns momentos, a Inês arrisca: «Na divisão o quociente pode ser maior do que o dividendo?»

«Porque não?»

«Então, será 500?»

Os outros controlam: computador, máquina de calcular. Parece que sim.

Agora, é fácil: 50 : 0,01 = 5.000; 50 : 0,001 = 50.000; 50 : 0,0001 = 500.000. Para números maiores temos que recorrer ao computador.

O David e o Rodrigo vêem a luz:

«Então, a Sara teve infinitamente azar»

«Para a Sara a gente deveria dividir por 0 o que dava um número tão grande que é infinito.»

No meio ficou o início de uma discussão particular com a Inês que considera: «A maior coisa é o infinito. A menor, não é o zero, é o infinito negativo[4] ... ou talvez seja o mesmo infinito.»

Investigar porquê?

Como normalmente acontece quando surgem perguntas ou dúvidas no grupo de trabalho que constitui a turma, o objecto de investigação é bastante simples para o grupo que o quer investigar. Isto porque a investigação decorre directamente das actividades que o grupo tem entre mãos – duma forma mais clara no caso da festa do magusto, mas também na situação do scrabble. A pergunta está incluída no trabalho que é consequência da vida do grupo.

Não é inocente: quanto mais interessado se estiver, maior é a motivação para conseguir uma problematização correcta. Entendemos aqui por problematização a capacidade de traduzir uma situação num certo número de passos lógicos que poderão por sua vez permitir a aplicação dum algoritmo no sentido mais lato do termo: uma série finita de passos que leva seguramente a uma solução.

Levados pela situação e pela reflexão sobre ela, os alunos e o professor testam possibilidades e constroem o que Vergnaud designa como conceitos-em-acto: discutem frequência e média num caso, discutem padrões, derivados para um limite conhecido noutro.

Não se trata aqui de «aprender o conceito de média» ou «fixar o conceito de limite», mas de analisar numa situação muito concreta o que se passa exactamente, procurando uma linguagem comum. Este trabalho é fundamental no processo didáctico que permite aos alunos cada um por si alcançar um quadro de referência em matemática incompleto e provisório, um conjunto de conceitos-em-acto, para mais tarde chegar a verdadeiros conceitos.

À partida as letras necessárias no jogo do scrabble obrigam a um raciocínio em que se consegue aplicar um algoritmo uniforme para todos. O resultado obtido mostra por outro lado, que a simples tradução do pensamento subjacente ao cálculo da distribuição das letras num universo artificialmente limitado, aplicando a(s) operação(ões) escolhida(s), não retrata fielmente a verdadeira realidade sentida: é preciso compensar as letras pouco frequentes com uma presença obrigatória que foge às regras do algoritmo escolhido. É exactamente esta constatação e esta análise que permite a subtileza da problematização e da montagem dum raciocínio lógico, algo que o algoritmo por sí só nunca poderá revelar.

Podemos parafrasear John Allen Paulos[5] e afirmar que o cálculo por si próprio não ensina nem conceptualiza nada. Trata-se apenas de uma estrutura rígida que ajuda a dar corpo ao processo de investigação, pelos resultados que mostra quando consequentemente aplicado: chega ou não chega a uma solução, que solução, etc. . Mas só no quadro desta investigação é possível interpretar o que o algoritmo transmite em situações «absurdas»: qualquer tentativa para definir o preço médio de uma prenda que não existe leva a resultados que parecem impossíveis. É a reformulação do problema que pode fazer perceber que se trata duma situação limite e não a simples aplicação do algoritmo.

Vergnaud[6] lembra que a conceptualização é o fim dum longo processo, que passa por multiplas manipulações que cristalizam momentaneamente em conceitos-em-acto. Os conceitos-em-acto serão depois mobilizados em novas situações parecidas («isto é como fizemos no jogo do scrabble», «isto é mais ou menos como quando fizemos o problema das rifas») que poderão servir de trama para ajudar a analisar o novo problema. É também nestas novas situações que os conceitos-em-acto podem ser reformulados, alterados, posto de lado por outros. Mas nunca desaparacem. Servem cada uma das crianças no seu próprio processo de conceptualização porque é cada criança por si que procura globalizar e generalizar o seu modelo referencial.

Pondo as coisas desta forma, o ficheiro de problemas, o material Cuisenaire ou material MAB, o treino de habilidades na aplicação dos mais diversos algoritmos, etc., são apenas instrumentos estruturantes. Não dão conhecimento. Ajudam a visualizar melhor um raciocínio porque ajudam a abstrair.

O verdadeiro trabalho matemático está na própria situação e na sua respectiva problematização. A investigação[7] em didáctica da matemática realizada nos últimos 20 anos aponta neste sentido. Os textos disponíveis no Centro de Recursos poderão facultar informação aos grupos cooperativos do Movimento da Escola Moderna, que queiram aprofundar a sua prática matemática.

[1] Um registo exaustivo da temperatura com um termómetro mal graduado obrigou a turma a trabalhar constantemente com números negativos.

[2] No 4º ano haverá uma grande investigação sobre a velocidade de carros que descem um plano inclinado. Procuraremos saber como a velocidade é influenciada pelas características de diferentes caros.

[3] Este relato foi escrito a meias com Dora Paiva.

[4] Ver nota 1

[5] John Allen P.s, «O Circo da Matemática» pp 38-42, Europa-América, 1993

[6] G. Vergnaud in «Didactiques des Mathématiques» dirigé par J. Brun, Delachaux et Niestlé, 1996

[7] idem, e

John Mason, «L'Esprit mathématique», De Boeck & Larcier, Paris-Bruxelles, 1997

Anna Sierpinska, «La compréhension en mathématiques», De Boeck & Larcier, Paris-Bruxelles, 1997

RECTIFICAÇÃO

Por lapso nosso não foi incluído a bibliografia do artigo "Estruturas de autoformação cooperada no Movimento da Escola Moderna Portuguesa" de Inácia Santana, que foi publicado na Revista Escola Moderna Nº3 - 5ª série - 1998.

BERBAUM, Jean (1993). Aprendizagem e formação. Porto: Porto Editora.

ESTATUTOS E REGULAMENTO INTERNO do Movimento da Escola Moderna

FONSECA, Helena (1995), Planificação negociada no 1º ciclo do ensino básico: estudo de caso, (documento policopiado)

HENRIQUE, M., SOARES, J. E VILHENA, G. (orgs.) (1992). Nos 25 anos do Movimento da Escola Moderna Portuguesa. Lisboa: MEM.

NICK, E. e RODRIGUES, H.B. (1977). Modelos em Psicologia. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

NIZA, Sérgio, (1997) Formação Cooperada, Lisboa: Educa

NIZA, Sérgio (1996). O modelo curricular de educação pré-escolar da Escola Moderna Portuguesa. *in* Formosinho, Júlia (org.) Modelos Curriculares do Jardim de Infância, Porto: Porto Editora.

NÓVOA, António e FINGER, Mathias, (org.) (1988). O método autobiográfico e a formação. Lisboa: Ministério da Saúde, Departamento de Recursos Humanos.

NÓVOA, António (coord.) com textos de CHANTRAINE-DEMAILLY Lise et al. (1992), Os Professores e a sua Formação, Lisboa: Publicações D. Quixote e Instituto de Inovação Educacional.

PIRES, Júlio (1995), Práticas de Planificação na Escola Moderna Portuguesa (Um estudo exploratório), Dissertação de Mestrado em Ciências de Educação, (documento policopiado)

SANTANA, Inácia (1993). «A influência da Escola Moderna em percursos de formação». Inovação, Vol. 6, pp.29-46

VYGOTSKY, L.S. (1988). A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes.

ZEICHNER, Kenneth M. (1993). A Formação Reflexiva de Professoras. Lisboa: EDUCA-Professores.